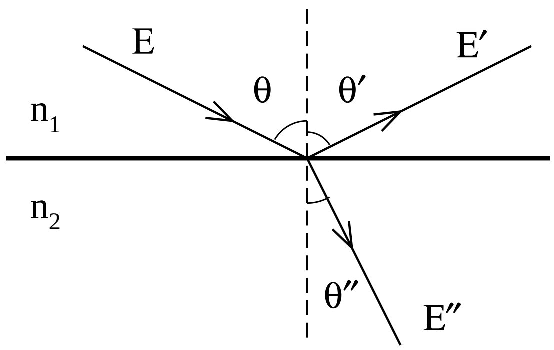
1 Speglun á skilfleti tveggja einangrara



Jaðarskilyrði:

- $H_\parallel$ og $E_\parallel$ samfelld yfir skilin
- $B_\perp$ og $D_\perp$ samfelld yfir skilin

Veljum hnitakerfi þannig að skilin liggi í $x-y$ plani. Skilgreinum innfallsplan sem ákveðst af innfallsgeisla og normal á skilflötinn (myndplanið). Vegna jaðarskilyrðanna verðum við að greina á milli tveggja tilfella:

- p–skautun, skautunarstefna í innfallsplani (p fyrir parallel, þýska)
- s–skautun, skautunarstefna hornrétt á innfallsplan (s fyrir senkrecht, þýska)

1.1 p – skautun

Leggjum x–ás í innfallsplanið $\implies$ $E_y = 0$

$$\vec{E}_p(\vec{k}_1,\vec{r}) = \vec{E}_p e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} \qquad \vec{k}_1 = k_1(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z)$$

$$E_x = E_p\cos\theta e^{-ik_1(x\sin\theta+z\cos\theta)}$$

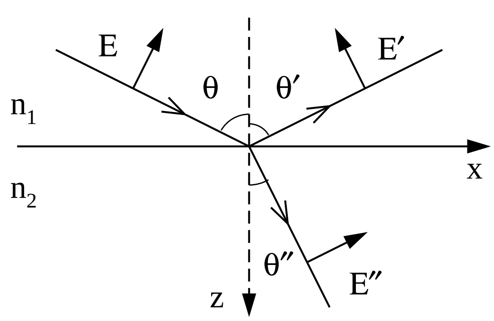
$$E_z = -E_p\sin\theta e^{-ik_1(x\sin\theta+z\cos\theta)}$$

$$E'_x = -E'_p\cos\theta' e^{-ik_1(x\sin\theta'-z\cos\theta')}$$

$$E'_z = -E'_p\sin\theta' e^{-ik_1(x\sin\theta'-z\cos\theta')}$$

$$E''_x = E''_p\cos\theta'' e^{-ik_2(x\sin\theta''+z\cos\theta'')}$$

$$E''_z = -E''_p\sin\theta'' e^{-ik_2(x\sin\theta''+z\cos\theta'')}$$



Jaðarskilyrði:

i $E_{\parallel}$ samfellt yfir skilin $\implies$ $E_x + E'_x = E''_x$

$$\implies \text{Fasaskilyrði} \quad k_1 \sin\theta = k_1 \sin\theta' = k_2 \sin\theta''$$

$$\boxed{\implies \quad \theta = \theta' \ \text{ specular speglun}}$$

$$\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\boxed{\implies \quad n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta'' \quad \text{Lögmál Snell's}}$$

$$(E_p - E'_p)\cos\theta = E''_p \cos\theta'' \tag{1}$$

ii $D_{\perp}$ samfellt yfir mörkin fyrir öll x.

$$-\varepsilon_1(E_p + E'_p)\sin\theta = -\varepsilon_2 E''_p \sin\theta'' \qquad \varepsilon_i = n_i^2 \varepsilon_0$$

$$n_1^2(E_p + E'_p)\sin\theta = n_2^2 E''_p \sin\theta''$$

$$n_1(E_p + E'_p) = n_2 E''_p \tag{2}$$

Tökum (1) og (2) saman og eyðum n_1/n_2 með Snell.

$$\boxed{\begin{array}{c} \implies \quad r_p = \dfrac{E'_p}{E_p} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta''\cos\theta''}{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta''\cos\theta''} = \dfrac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')} \\ r_p \quad \text{sviðsspeglunarstuðull} \end{array}}$$

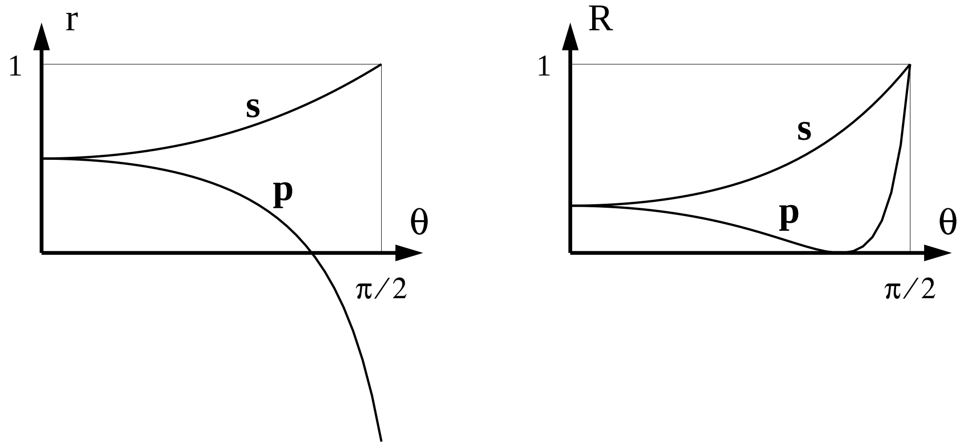
Sértilfelli: $\theta = 0$ $\qquad E_p - E'_p = E''_p$ og $n_1(E_p + E'_p) = n_2 E''_p$

$$\implies \quad r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

Aflspeglun $R_p = |r_p|^2 = \left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right|^2$

Á svipaðan hátt fæst $\boxed{r_s = \dfrac{\sin\theta\cos\theta'' - \sin\theta''\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta'' + \sin\theta''\cos\theta} = \dfrac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}}$

$$r_s(\theta = 0) = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$



$R_p = 0$ við Brewsterhornið θ_B. Um það gildir að $\tan(\theta_B + \theta'') = \infty$. Jöfnurnar sem lýsa sviðsspeglunarstuðlunum, $r = E'/E$, og tilsvarandi gegnskinsstuðlum, $t = E''/E$, kallast Fresnel jöfnur. Þær má líka skrifa á forminu

$$r_p = \frac{n_2 \cos\theta - n_1 \cos\theta''}{n_2 \cos\theta + n_1 \cos\theta''} \qquad t_p = \frac{2n_1 \cos\theta}{n_2 \cos\theta + n_1 \cos\theta''}$$

$$r_s = \frac{n_2 \cos\theta'' - n_1 \cos\theta}{n_2 \cos\theta'' + n_1 \cos\theta} \qquad t_s = \frac{2n_1 \cos\theta}{n_2 \cos\theta'' + n_1 \cos\theta}$$

Nákvæmari ritháttur væri að nota táknin r_{12} og t_{12} sem tilgreinir úr hvaða átt geislinn kemur að skilunum. Almennt gildir hér þar sem við víxlum á innfallsgeisla og gegnskinsgeisla

$$r_{ij} = -r_{ji} \qquad \text{og} \qquad n_j \cos\theta_j t_{ij} = n_i \cos\theta_i t_{ji}$$

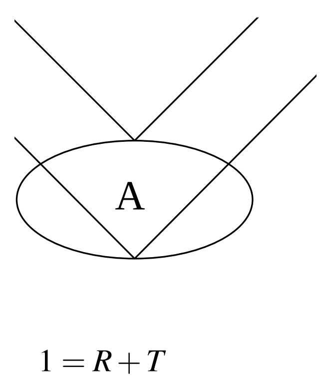
Athugið að hér stendur fyrri index fyrir efnið sem innfallsgeisli liggur í og sá seinni fyrir efnið sem ber brotna geislann. Þegar við víxlum innfallsstefnu og brotstefnu í gamla ritháttinum þarf að víxla n_1 og n_2 ásamt θ og θ'' í jöfnum Fresnels.

1.2 Varðveisla orkunnar

$$I = \frac{1}{2} v\varepsilon |E|^2 = \frac{1}{2}\frac{c}{n} n^2 \varepsilon_0 |E|^2 = \frac{1}{2} cn\varepsilon_0 |E|^2$$

$$IA\cos\theta = I'A\cos\theta' + I''A\cos\theta''$$

$$n_1|E|^2\cos\theta = n_1|E'|^2\cos\theta' + n_2|E''|^2\cos\theta''$$



$$1 = \left|\frac{E'}{E}\right|^2 + \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos\theta''}{\cos\theta}\left|\frac{E''}{E}\right|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 = R + T$$

Aflstuðlar: $R = |r|^2 \qquad T_{12} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos\theta''}{\cos\theta}|t_{12}|^2 = t_{12}t_{21}$

1.3 Fresnel og alspeglun

Hugmyndina um alspeglun höfum við hingað til byggt á að Snell hefur ekki rauntölulausn fyrir brotinn geisla þar sem $\frac{n_1}{n_2} > 1$ og $\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1$. Skoðum hvað Fresnel segir um þetta þar sem við leyfum θ_x að taka tvinntölugildi.

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1 \qquad \text{rauntala}$$

Setjum $\theta_2 = \theta_{2R} + i\theta_{2I}$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{2i}(e^{i\theta_2} - e^{-i\theta_2}) \;=\; \frac{1}{2i}(e^{-\theta_{2I}} - e^{\theta_{2I}})\cos\theta_{2R} \;+\; \frac{1}{2}(e^{-\theta_{2I}} + e^{\theta_{2I}})\sin\theta_{2R}$$

$$\Longrightarrow \qquad \cos\theta_{2R} = 0 \qquad \text{veljum lausn} \qquad \theta_{2R} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{2}(e^{-\theta_{2I}} + e^{\theta_{2I}}) = \cosh\theta_{2I} = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$$

$$\Longrightarrow \qquad \cos\theta_2 = -i\sinh\theta_{2I} \qquad \text{enginn raunhluti}$$

Fresnel:

$$r_s = \frac{-n_1\cos\theta_1 - in_2\sinh\theta_{2I}}{n_1\cos\theta_1 - in_2\sinh\theta_{2I}} \qquad |r_s| = 1$$

$$r_p = \frac{n_2\cos\theta_1 + in_1\sinh\theta_{2I}}{n_2\cos\theta_1 - in_1\sinh\theta_{2I}} \qquad |r_p| = 1$$

Eftir að innfallshorn hefur náð kritiska gildinu þar sem alspeglun hefst verður lengdin á R_s og R_p 1 en fasinn fer að breytast.

1.4 Ísog

Lögmál Beer's $\qquad I = I_0 e^{-\alpha z}$

$$I = \frac{1}{2}cn\varepsilon_0|E|^2 \qquad E = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

Til þess að lögmál Beer's rúmist í þessari mynd leyfum við bylgjutölunni k að taka tvinntölugildi.

$$E \;=\; E_0 e^{-i(\omega t - (k_R + ik_I)z)} \;=\; E_0 e^{-k_I z} e^{-i(\omega t - k_R z)}$$

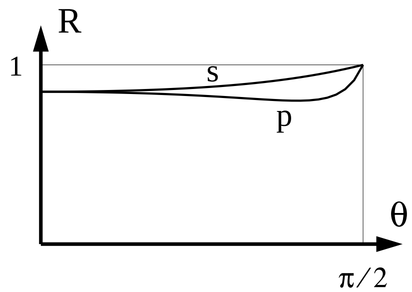
$$\Longrightarrow \qquad I = I_0 e^{-2k_I z} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 2k_I$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,n \qquad \Longrightarrow \qquad n = \frac{\lambda_0}{2\pi}(k_R + ik_I) = \frac{\lambda_0}{2\pi}(k_R + i\alpha/2)$$

1.5 Aflspeglun við skilflöt efna með og án ísogs

$$R(\theta=0) = \left|\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|^2 = \left|\frac{(n_{2R}-n_1)+in_{2I}}{(n_{2R}+n_1)+in_{2I}}\right|^2$$

Þverhlutinn $n_{2I} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\alpha$ verkar til hækkunar á aflspeglunarstuðlinum. Hár speglunarstuðull málma tengist þannig ísogseiginleikum þeirra.



$\lambda = 650\text{nm}$

	n	R(θ = 0)
Al	1.300 + i 7.11	0.907
Au	0.142 + i 3.37	0.955
Ag	0.070 + i 4.20	0.985

$\lambda = 10\mu\text{m}$

	n	R(θ = 0)
Al	26.0 + i 67.3	0.980
Au	7.41 + i 53.4	0.9899
Ag	13.0 + i 54.0	0.983