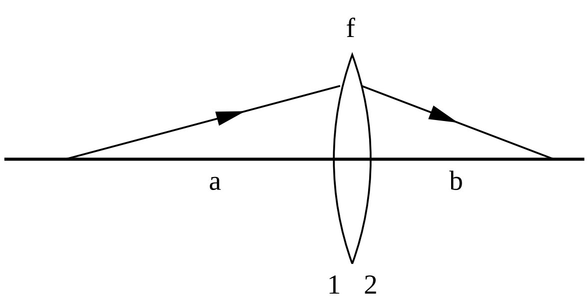
1 Geislarakning og geislahol

Hér skoðum við leið til að fylgja geisla í gegnum optisk kerfi. Undirstaðan er “paraxial” nálgun á Snell, þ.e. $\sin\theta \simeq \theta$. Linsujafnan $1/f = 1/a + 1/b$ gildir aðeins í þeirri nálgun.

Stærðin r lýsir fjarlægð punkts á geisla frá samhverfuás og r' hallatölu geisla. Geislinn verður þá einkenndur með vigranum (r, r').

1.1 ABCD fylki

1.1.1 Linsa



Vinstra megin linsunnar er geislavigurinn merktur með index 1 og hægra megin index 2. Linsujafnan gefur $1/f = 1/a + 1/b$. Linsan breytir ekki fjarlægð frá samhverfuás heldur aðeins hallanum.

$$r_2 = r_1$$

$$r_1' = r_1/a \implies 1/a = r_1'/r_1$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{r_1'}{r_1}$$

$$r_2' = -\frac{r_2}{b} = r_1' - \frac{r_1}{f}$$

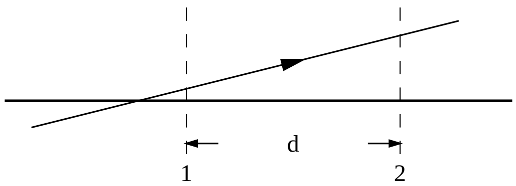
$\implies$ Línulegt samhengi er milli vigranna (r_1, r_1') og (r_2, r_2') sem við getum lýst með fylkjamargfeldi.

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ r_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_f \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1' \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + Br_1' \\ r_2' &= Cr_1 + Dr_1' \end{aligned}$$

$$A = 1 \qquad B = 0 \qquad C = -1/f \qquad D = 1$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

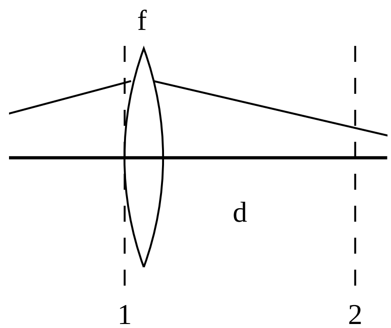
1.1.2 Færsla yfir vegalengd d



$$r_2 = r_1 + d r_1' \qquad r_2' = r_1'$$

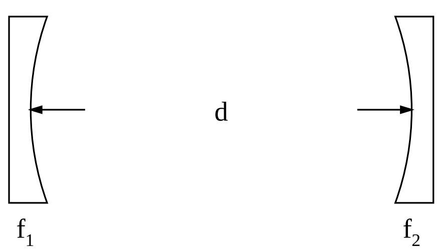
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

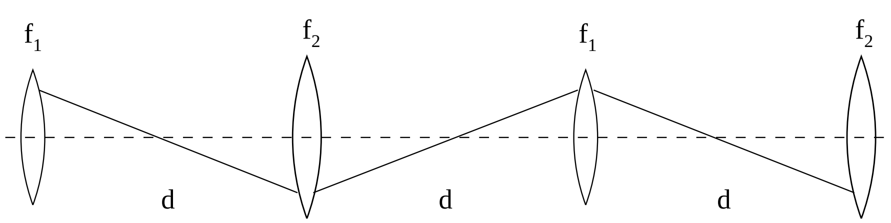
1.1.3 Geislaleiðari



$$\begin{bmatrix} r_2 \\ r_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_d \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_f \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-d/f & d \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1' \end{bmatrix}$$

Til að fylgja þróun geisla í geislaholi búum við til jafngildan “linsu–geislaleiðara”.





Leiðarinn er lotubundinn og ef við byrjum á f_1 verður ABCD fylkið sem lýsir lotunni

$$M = M_d M_{f_2} M_d M_{f_1}$$

$$A_M = (1-d/f_2)(1-d/f_1) - d/f_1 \qquad B_M = (2-d/f_2)d$$

$$C_M = -(1-d/f_1)/f_2 - 1/f_1 \qquad D_M = 1-d/f_2$$

M^n lýsir stöðu geislans eftir n lotur.

Lögmál Sylvesters lýsir hvernig 2x2 fylki eru hafin í n-ta veldi.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^n = \frac{1}{\sin\theta}\begin{bmatrix} A\sin n\theta - \sin(n-1)\theta & B\sin n\theta \\ C\sin n\theta & D\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \end{bmatrix}$$

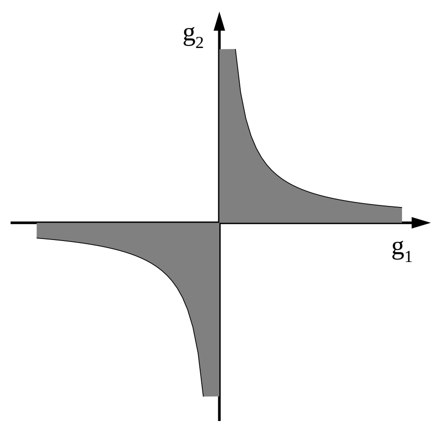
$$\cos\theta = \frac{1}{2}(A+D) \implies \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^n \text{ endanlegt ef } -1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1$$

Með einfaldri umskrift á þessu skilyrði fyrir fylkið M fæst stöðugleikaskilyrði fyrir geislahol. Með þessu skilyrði er tryggt að fjarlægð geisla frá miðlínu sé takmörkuð svo endanlegt þvermál spegla nægi til að grípa geislann.

Stöðugleikakröfur $\quad 0 < (1-\frac{d}{2f_1})(1-\frac{d}{2f_2}) < 1$

Setjum $\quad g_i = 1 - \frac{d}{2f_i} = 1 - d/R_i$

$$\implies 0 < g_1 g_2 < 1$$

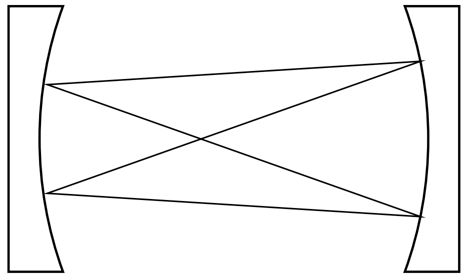


Fabry-Perot geislahólf: $R_i = \infty \implies g_1 = g_2 = 1$ óstöðugur jaðartilfelli

Confocal geislahólf: $R_i = d \implies g_1 = g_2 = 0$ (ó)stöðugur jaðartilfelli

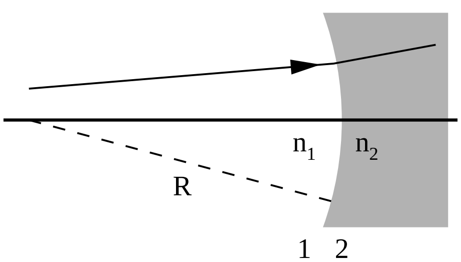
$$M_{conf} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}_{n+1} = -\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}_n$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}_{n+2} = \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}_{n} \qquad \text{óháð } r \text{ og } r'$$



Confocal hol eru auðveldari viðureignar en flest önnur því aðgerðin að halla öðrum speglinum jafngildir aðeins tilfærslu á samhverfuásnum á hinum speglinum. Þau hafa einnig þann eiginleika að leisigeisli sem skotið er inn utan samhverfuáss speglast ekki til baka í leisinn og truflar hann.

1.1.4 Skilflötur með krappa



Geislagangi um skilflöt tveggja efna með brotstuðla n_1 og n_2 þar sem skilin hafa krappa getum við líka lýst með fylkjareikningi. Hér þarf þó að festa rithátt um formerkjanotkun á krapparadíusnum, R. Við notum jákvæðan radíus þegar geislinn kemur að íhvolfum skilfleti eins og sýnt er á myndinni hér til hliðar, og neikvæðan radíus þegar geislinn kemur að kúptum fleti. Planflötur gefur að sjálfsögðu $R = \infty$.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2}\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Héðan er stutt að fara til að finna linsugerðarjöfnur, bæði í þunnlinsunálgun og raunhæfari þykklinsu formi. Linsugerðarjafna lýsir brennivídd linsu sem falli af krapparadíum, þykkt og brotstuðli linsunnar.