

Pendúll

1 Inngangur

Pendúll er einfalt affræðilegt kerfi þar sem lóð sveiflast í sveigjanlegum streng um fastan upphengipunkt. Líkan af þessu kerfi verður enn einfaldara ef við lítum við framhjá viðnámskröftum og gerum ráð fyrir að lóðið sé punktmassi og strengurinn massalaus. Við þessa einföldun fæst að lota sveiflunnar verður óháð massa lóðsins og aðeins lítillega háð útslagi sveiflunnar. Pendúllinn skipar mikilvægan sess í affræðinni vegna þessara tveggja eiginleika. Fyrir daga rafeindaklukkunnar var pendúllinn grunneining í flestum klukkum.

2 Hreyfilíkön

Hreyfingu pendúls í þyngdarsviði er lýst með diffurjöfnunni

$$m \frac{d^2(L\theta(t))}{dt^2} + mg \sin(\theta(t)) = 0 \quad (1)$$

þar sem m er massi lóðsins, θ stöðuhorn strengsins miðað við jafnvægispunkt (lóðrétt), L lengd pendúlsins og t er breytistærð fyrir tímann. Þessi jafna byggir á öðru lögmáli Newtons. Fyrsti liðurinn er massi sinnum hröðun og annar liðurinn lýsir lokakrafti á lóðið í hreyfistefnuna. Lokakrafturinn er myndaður af lóðréttum þyngdarkrafti og átaki strengsins upp að snúningspunktinum.

Þar sem stærðin m er sameiginleg báðum liðum í jöfnu 1 má deila þessari stærð út og jafnan verður óháð massanum. Með lítilsháttar umskrift fæst

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0 \quad (2)$$

Við náum upplýsingum um lotu sveiflunnar úr þessari jöfnu eftir tveimur leiðum:

1. Leysum jöfnu 2 með þeirri nálgun að $\theta \simeq \sin \theta$. Þetta gildir þegar $\theta \ll 1$ í radíönum talið.
2. Lotuna má tákna með nokkuð flóknu heildi, án þess að leysa sjálfa diffurjöfnuna, og leysum svo heildið með veldaröð.

2.1 Líkan 1

Með nálguninni $\theta \simeq \sin \theta$ fær jafna 2 formið

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta(t) = 0 \quad (3)$$

Jafnan hefur lausn

$$\theta(t) = \Theta \cos(\omega_0 t) \quad (4)$$

þar sem Θ er hámarksútslag pendúlsins. Þessi lausn miðast við að tímatalið byrji í ystu stöðu. Stærðin ω_0 lýsir horntíðni sveiflunnar og hefur gildið

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (5)$$

Tengst horntíðni við lotuna T_0 eru $\omega_0 = 2\pi/T_0$ svo lotan fær formið

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6)$$

Með þeirri nálgun sem við höfum gert er lotan því óháð massa og hámarksútslagi og ræðst einungis af lengd pendúls og þyngdarhröðuninni.

2.2 Líkan 2

Eins og áður sagði má draga upplýsingar um lotuna úr jöfnu 2 án þess að finna first hvernig stærðin θ er háð tíma. Við látum liggja milli hluta hvernig þetta er gert, en aðferðin gefur lotuna T sem

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^\Theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\Theta)}} \quad (7)$$

Þetta heildi má leysa með veldaröð í stærðinni $\sin^2 \frac{\Theta}{2}$ svo lotan T fær formið

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\Theta}{2} + \dots \right] \quad (8)$$

Hér er lotan orðin lítillega háð útslagi. Fyrsti liðurinn í summunni svarar til einfaldara líkansins. Munur á þessum líkönum er hins vegar ekki mælanlegur fyrr en liður 2 er orðinn stærri en óvissan í tímamælingunni.

3 Mælingar

- Safnið gögnum til að reikna líkangildi á lotunni T_0 .
- Mælið lotu pendúlsins með skeiðklukku fyrir nokkur gildi útslags á bilinu $\Theta = 5^\circ$ til $\Theta = 30^\circ$. Veljið fjölda lota sem notaðar eru í mælingunni og rökstyðjið ákvörðunina.
- Mælið lotu pendúlsins með ljóshliði og rafeindaklukku fyrir nokkur gildi útslags á bilinu $\Theta = 5^\circ$ til $\Theta = 30^\circ$.

4 Úrvinnsla gagna

Berið mælingar á lotunni saman við einfaldasta líkan sem mælióvissa gefur tilefni til að nota. Mælingar með rafeindaklukkunni sýna greinilega að lotan breytist með útslagi og kalla því á seinna líkanið. Fyrstu tveir liðirnir í jöfnu 8 gefa

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right] \quad (9)$$

Hér er lotan T línulegt fall af stærðinni $\sin^2 \frac{\Theta}{2}$ og því er eðlilegt að birta lotumælingarnar sem fall af þessari stærð og nota grafið til að lesa stærðirnar T_0 úr skurðpunkti við lotuásinn og stærðina $T_0/4$ úr hallatölu. Hér þarf að sjálfsögðu að huga að samræmi milli þessara stærða sem og samræmi við líkangildi á T_0 .

Athugið einnig hvort mælinákvæmnin gefur ástæðu til að taka þriðja liðinn með í flóknara líkaninu.

4.1 Óvissur

Óvissur mældra gilda þurfið þið að meta og síðan að yfirfæra á afleiddar stærðir. Þannig verður óvissa á stærðinni $\sin^2 \frac{\Theta}{2}$

$$\Delta \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{d}{d\Theta} \left(\sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) \Delta \Theta = \frac{1}{2} \sin \Theta \Delta \Theta \quad (10)$$

Stærðin $\Delta \Theta$ þarf að sjálfsgöðu að vera í náttúrulegum einingum (radíönum) í jöfnu 10.