

Eigintíðni og þvingaðar sveiflur

Tilvísun

1. Young & Freedman: *University Physics*, kaflar 13, 30 og 31.
2. Ohanian: *Physics*, kaflar 15, 27, 32, 34.
3. Leó Kristjánsson og fl.: *Fylgikver um Eðlisfræði II*, kafli 9.

1 Inngangur

Eiginsveiflur og þvingaðar sveiflur kerfa koma upp í öllum greinum eðlisfræði og verkfræði. Mikilvægi skilnings á eðli þessarar atriða verður því seint ofmetið. Nemendur kynntust sveiflum af þessu tagi í tilraunum (pendúll og svifbraut) í námskeiðinu Eðlisfræði I. Þar sem og annarsstaðar einkenndust sveiflurnar af að orkan sem bundin var í kerfinu sveiflaðist milli tveggja forma (stöðuorku og hreyfiorku, rafsviðsorku og segulsviðsorku, o.s.frv.). Hér verður fjallað um sveiflur í RCL rafrás og hugtökin hermutíðni, eigintíðni, deyfing, andóf, viðbragðsferill, gæðastuðull og bandbreidd kynnt.

2 Kynning á hugtökum

2.1 Eiginsveiflur RCL rásar

Um spennufall í raðtengdri RCL rás, eins og sýnd er á mynd 1, gildir samkvæmt lögmáli Kirchoffs,

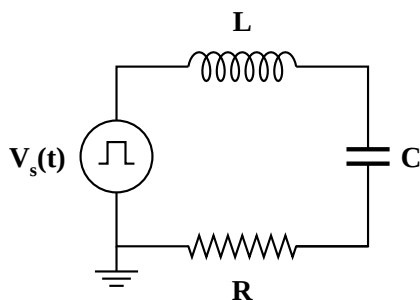
$$V_s = V_L + V_C + V_R \quad (1)$$

þar sem

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad V_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad V_R = IR. \quad (2)$$

Örvun með kassabylgju þar sem V_s er snögglega breytt frá $V_s = 0$ til $V_s = V_{s0}$ við $t = 0$ gefur svipullaun á diffurjöfnunni (1) sem hefur formið

$$I = \frac{V_{s0}}{\omega_e L} e^{-bt} \sin \omega_e t \quad , \quad t > 0 \quad (3)$$



Mynd 1: RCL rás örvuð með kassabylgju V_s .

þar sem deyfingarstuðullinn b er gefinn með

$$b = R/2L \quad (4)$$

og eigin-(horn)tíðnin ω_e með

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - b^2 \quad \omega_0^2 = 1/LC. \quad (5)$$

Eigintíðni kerfisins stjórnast því ekki aðeins af stærðunum L og C heldur einnig af viðnáminu R . Ef R er stillt þannig að ω_e stefni á 0 þá stefnir stærðin $\frac{\sin \omega_e t}{\omega_e}$ á t og straumurinn sveiflast ekki lengur (fer ekki í gegnum núll-punktinn). Þá er fengin markdeyfing með stuðulinn b_m .

$$b_m^2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad R_m^2 = \frac{4L}{C} \quad (6)$$

2.2 Þvingaðar sveiflur

2.2.1 Andóf

Fyrir hreintóna örvun þ.e. $V_s = V_{s0}e^{i\omega t}$ nægir að skoða stöðugar lausnir og horfa framhjá svipullausnum sem dofna með tíma eins og sást í fyrsta liðnum um eiginsveiflur. Lausnir á (1) verða

$$I = I_0 e^{i(\omega t - \theta)} \quad (7)$$

þar sem ω er örvunartíðnin og θ er fasamunur straums og örvunarspennu. Með þessu formi má einfalda jöfnur (2) til muna og skrifa sem:

$$V_L = i\omega L \cdot I \quad V_C = \frac{1}{i\omega C} \cdot I \quad V_R = R \cdot I \quad (8)$$

Með þessarri umskrift eru bæði V_L og V_C komin á ohmskt form; $V_L = Z_L I$ og $V_C = Z_C I$. Andófið Z_X er tvinntala sem er háð tíðninni ω og fasahorn þess lýsir fasamun á milli straums og spennu yfir íhlutinn.

Jöfnu (1) sem í grunninn er tímarúmsjafna má nú umrita á form sem lýsir hvernig I hegðar sér í tíðnirúminu.

$$V_s = (i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R)I(\omega) = Z(\omega)I(\omega) \quad (9)$$

$$Z(\omega) = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = Z_R + Z_L + Z_C \quad (10)$$

Andófið Z fyrir þessa þrjá raðtengdu íhluti er því summa þriggja liða; raunhlutans R og þverhlutanna ωL og $-1/\omega C$. Stærð $I(\omega)$ ákvarðast af hlutfallinu $I_0 = |I| = |V_s|/|Z|$

$$I_0 = \frac{V_{s0}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (11)$$

og fasahorn milli örvunarspennu og straums ræðst af fasahorni Z . Af jöfnu (10) má lesa að $|Z| \rightarrow \infty$ í mörkunum $\omega \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \infty$. I_0 sem er í réttu hlutfalli við $1/|Z|$ stefnir því á 0 í þessum sömu mörkum. I_0 verður stærst við minnsta gildi á Z , sem fæst þegar þverhlutinn $\text{Im}(Z) = 0$; við hermutíðnina

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (12)$$

Hágildi straumsins $I_0(\omega)$ verður $I_{0max} = V_{s0}/R$.

Fasamun örvunarspennu og straums er lýst með

$$\theta = \arg(V_s) - \arg(I) = \arg(Z) = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \quad (13)$$

Í mörkunum $\omega \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \infty$ stefnir θ á $-\pi/2$ annarsvegar og $+\pi/2$ hinsvegar. Í fyrri mörkunum er það þéttirinn C sem stjórnar hegðun rásarinnar en spólan L í þeim seinni. Við hermutíðnina ω_0 er $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, svo að fasahornið verður $\theta = 0$, þ.e. rásin er ohmsk, örvunarspenna og straumur eru í fasa.

2.2.2 Orkubúskapur

Raunhluti jöfnu (9) sinnum raunhluti straumsins (sbr. $P = VI$) gefur jöfnu sem lýsir orkuflæðinu (aflinu) milli íhlutanna sem mynda rásina.

$$\operatorname{Re}\{I\}\operatorname{Re}\{V_s\} = I_0^2 \left[R \cos^2(\omega t - \theta) + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \sin(\omega t - \theta) \cos(\omega t - \theta) \right] \quad (14)$$

Vinstra megin jafnaðarmerkisins er liður sem lýsir orkuflæði til og frá sveifflugjafanum. Fyrsti liður hægra megin jafnaðarmerkis er ávallt jákvæður eða núll og lýsir Joule-hitun í viðnáminu (R). Annar og þriðji liður, sem hafa andstæð formerki, lýsa orkuflæði til og frá spólu (L) og þétti (C). Þegar orkustraumurinn liggur frá segulsviði spólunnar eykst orkuinnihald rafsviðsins í þéttinum, og öfugt. Við hermutíðnina jafna annar og þriðji liður hvorn annan út og orkan sem bundin er í rásinni sveiflast milli spólu og þéttis. Frá sveifflugjafa streymir þá aðeins það sem nemur orkutapi í viðnáminu. Þegar tíðnin er frábrugðin hermutíðninni rúma spóla og þéttir ekki jafn mikla orku svo að orkustreymið verður bæði til og frá sveifflugjafanum.

Við hermutíðnina er vel skilgreindur orkuskammtur U_{ω_0} bundinn í rásinni og sveiflast milli spólu og þéttis.

$$U_{\omega_0} = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (15)$$

Í hverri sveiflu tapast orkan

$$\Delta U = I_0^2 R \int_0^{T_0} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{\pi}{\omega_0} I_0^2 R. \quad (16)$$

Hér er T_0 sveiflutíminn, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Við skilgreinum kennistærð fyrir rásina, svokallaðan gæðastuðul Q , sem hlutfall orkunnar sem rásin geymir við hermutíðnina og meðalorkutaps á einum radíana í sveiflunni.

$$Q \equiv \frac{2\pi U_{\omega_0}}{\Delta U} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (17)$$

Með þessari kennistærð getum við umritað jöfnu (11) á form sem er hentugra til túlkunar á mældum viðbragðsferlum.

$$I_0 = \frac{V_{s0}}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]^2}} \quad (18)$$

Jafna (18) sýnir viðbragð rásarinnar við áreitinu V_{s0} við tíðnina ω . Viðbragðið er stærst við hermutíðnina ω_0 , en fellur svo til beggja hliða. Látum stærðirnar $\omega_{\pm}$ tákna þau tíðnigildi sem gefa svörun sem er $1/\sqrt{2}$ af hágildinu við hermutíðnina. Þessi tíðnigildi þurfa að fullnægja jöfnunni

$$\left| \frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\pm}} \right| = \frac{1}{Q} \quad (19)$$

Nálgunarlausnirnar, fyrir $Q \gg 1$, eru á forminu

$$\frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} \simeq 1 \pm \frac{1}{2Q} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \equiv \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (20)$$

Þá má einnig lesa úr sumum jöfnunum hér að framan að samband stærðanna $\omega_{\pm}$ við fasann fæst með

$$\theta(\omega_{\pm}) = \pm \frac{\pi}{4} \quad (21)$$

Gæðastuðullinn Q stjórnar því bæði lögun viðbragðsferilsins og fasaferilsins. Stærðin $\Delta\omega$ kallast bandbreidd svörunarinnar.

3 Tilraun

3.1 Eiginsveiflur RCL rásar

Stillið upp RCL rás eins og sýnt er á mynd 1. Veljið $C=40\text{nF}$, $L=100\text{mH}$, $V_{s0} \geq 1\text{V}$ og $f=100\text{Hz}$ (kassabylgju). Tengid spennumerkið V_s inn á aðra rás sveiflusjárinnar og V_R inn á hina. Veljið gildi á R þannig að sveiflan sé fallin í $\sim 10\%$ af upphafsgildi þegar kassabylgjan sparkar næst í rásina.

- Mælið valda punkta á ferlinum $V_R(t)$ sem gefa upplýsingar um stýristærðirnar b og ω . Stillið upp jöfnum sem tengja þessar stýristærðir við mældar stærðir og finnið gildi þeirra.
- Finnið viðnámsgildi sem gefur markdeyfingu.

Bráðabirgðaurvinnslu og túlkun á þessum mælingum skal gera á staðnum strax eftir mælingar og bera niðurstöður undir kennara til að forðast misskilning og rangtúlkun.

3.2 Þvingaðar sveiflur

Notið rásina frá fyrri lið en pumpið hana nú með sínus sveiflum. Stillið ytra viðnámið á $R=200\Omega$. Byrjið á að finna hermutíðnina.

- Mælið hvernig $V_R(f)$ og fasamunur V_R og V_S hegða sér sem fall af f á bili sem nær yfir a.m.k. $0.3f_0 < f < 3f_0$. Þetta eru seinlegar mælingar svo hér skal halda vel á spöðunum.

Lesið hermutíðni, bandbreidd og Q -gildi úr bæði spennu- og fasamæligögnum, og berið saman við líkön.