Pendúll

Tilvísun

1. Young & Freedman: *University Physics*, kafli 13.5.
2. Benson: *University Physics*, kaflar 15.1 og 15.4

1 Inngangur

Í þessari æfingu kynnist nemandi einföldu líkani, jöfnu fyrir sveiflutíma pendúls, sem þó bregst við nánari athugun. Skoðað verður hvenær frávik eru orðin merkjanleg og líkanið bætt til samræmis við raunveruleikann. Skipta má æfingunni í tvo hluta, í fyrri hlutanum er sveiflutími pendúls mældur með skeiðklukku en í síðari hlutanum er hann mældur með rafrænni klukku.

2 Einfaldur pendúll

Einföldum pendúl er lýst í kennslubók (sjá tilvísun). Kraftar samsíða hreyfistefnunni á mynd 13.20 í Young & Freedman eru jafnir ma. Umskrift á þessari staðhæfingu gefur hreyfijöfnu pendúls

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0 \tag{1}$$

Hér er θ frávikshorn pendúlsins við lóðlínu, L lengd hans og $g = 9.823\mathrm{m/s^2}$ er þyngdarhröðun. Rétt er að benda á að stærðin m kemur ekki fyrir í jöfnu (1). Hreyfimynstur pendúlsins er þannig óháð massa lóðsins. Fyrir lítil horn θ má nálga $\sin(\theta)$ með θ, eða $\sin(\theta) \cong \theta$. Þá fæst einföld lausn á jöfnu (1)

$$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t) \tag{2}$$

þar sem Θ er hámarksútslag pendúlsins og $\omega^2 = g/L$. Sveiflutíminn, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, er því

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3}$$

Mikilvægi pendúlsins felst m.a. í því að sveiflutíminn er óháður massa lóðsins og óháður útslagi innan þeirra marka sem nálgunin segir til um. Með stækkandi útslagi bregst nálgunin $\sin(\theta) \cong \theta$. Það ræðst af nákvæmni í tímamælingu hvenær frávik frá jöfnu (3) verða merkjanleg. Þá förum við venjulega leið eðlisfræðinnar og endurbætum líkanið okkar, með því að sleppa nálguninni.

3 Endurbætt líkan

Jöfnu (1) er ekki hægt að leysa beint án nálgunar og fá lausn á lokuðu formi á sama hátt og í jöfnu (2). Hins vegar má lesa sveiflutíma úr henni. Það verður ekki gert hér, en með réttri meðhöndlun[1] fæst sveiflutíminn

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\Theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\Theta)}} \tag{4}$$

[1] Ragnar Sigurðsson, *Fyrirlestrar um afleiðujöfnur, Fourier-greiningu og tvinnfallagreiningu,* Háskólaútgáfan, 1994, bls. 9 - 10

Þetta heildi er leyst í *viðauka* og lausnin skrifuð sem óendanleg röð. Hér eru fyrstu þrír liðirnir sýndir

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\Theta}{2} + \dots \right] \tag{5}$$

Til að kanna hversu marga liði þarf í nothæft líkan má til dæmis setja inn $\Theta = 60°$. Þá fæst röðin $T = T_0(1 + 1/16 + 9/1024 + \dots)$, þannig að þriðji liðurinn er minni en 1% af fyrsta liðnum. Gerum ráð fyrir að sú skekkja sem verður við að nota aðeins tvo liði sé minni en óvissa í tímamælingu og sleppum því þriðja lið og síðari liðum - í bili. Hér höfum við einfaldað líkanið í

$$T_\Theta = T_0 \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2} \right) \tag{6}$$

Fyrri liðurinn í jöfnu (6) er klassíska líkanið (jafna (3)) og sá seinni sýnir hvernig útslagið Θ breytir sveiflutímanum T_Θ.

4 Mælingar á sveiflutíma pendúls

Pendúllinn er lóð sem að fest er upp í gálga með mjúku massalitlu bandi. Á gálganum er gráðubogi til að mæla útslag sveiflu pendúlsins.

- Mælið lengd pendúlsins, L. Athugið að hér er lóðið ekki punktmassi líkt og á mynd 13.20 í Young & Freedman og því þarf að skilgreina lengdina L.

4.1 Mælingar með skeiðklukku

- Mælið sveiflutíma pendúls með skeiðklukku fyrir $\Theta < 5°$, $\Theta = 15°$ og $\Theta = 30°$. Metið hvort það borgar sig að mæla eina sveiflu eða miðla yfir margar. Hvers vegna ekki 100? Ræðið um það ykkar í milli.

- Berið mæligögnin (Θ, T_Θ) saman við líkan. Munið eftir óvissu.

Tillaga að úrvinnslu: Til að finna óvissu á líkangildi lotunnar T_0 diffrum við líkan (3) (sjá græna kver) eða

$$\Delta T_0 = \frac{\partial T_0}{\partial L} \cdot \Delta L$$

og fáum

$$\Delta T_0 = 2\pi \cdot \frac{\partial}{\partial L}\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \Delta L$$

eða

$$\Delta T_0 = \frac{\pi \cdot \Delta L}{\sqrt{g \cdot L}}$$

Til að tengja saman óvissumælingar á sveiflutíma n sveiflna pendúls T_n við óvissu einnar lotu er stærðin $\overline{T} = \frac{T_n}{n}$ skilgreind og óvissa hennar er

$$\Delta \overline{T} = \frac{1}{n} \cdot \Delta T_n$$

Athugið hvort að óvissumörk líkans og mælinga skarast.

4.2 Mælingar með rafrænni klukku

- Stillið klukkuna á *Period Mode* og mælið sveiflutímann fyrir Θ á bilinu 5° - 40° með um það bil 5° millibili. *Leiðbeiningar um klukkuna má nálgast í viðauka.*

- Berið mæligögnin (Θ, T_Θ) saman við líkan. Munið eftir óvissu.

Tillaga að úrvinnslu: Líkanið sem lýsir tengslum Θ og T_Θ er ekki línulegt.. Því verður myndrænn samanburður erfiður. Hvað er til ráða? Þægilegast er að umskrifa jöfnu (6) þannig að fall af annarri mælistærðinni verði línulega háð falli af hinni. Með afar einfaldri umskrift á (6) fæst

$$T_\Theta = T_0 + \frac{T_0}{4}\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}\right) \tag{7}$$

Hér er línulegt samband milli T_Θ og stærðarinnar $\sin^2\frac{\Theta}{2}$. Gerið graf með $\sin^2\frac{\Theta}{2}$ á lárétta ásnum og T_Θ á þeim lóðrétta. Gögnin sýna þá línulegt samhengi breytistærðanna þar sem skurðpunktur við T_Θ er í T_0 og hallatala línunnar er $\frac{T_0}{4}$.

Óvissa á stærðinni $\sin^2\frac{\Theta}{2}$ er fengin með

$$\Delta\sin^2\frac{\Theta}{2} = \frac{\partial\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)}{\partial\Theta}\Delta\Theta = \frac{1}{2}\sin\Theta\Delta\Theta$$

Athugið að stærðina $\Delta\Theta$ þarf að setja inn í einingum radíanar því diffurreglurnar sem við höfum beitt gilda einungis í því einingarkerfi.

Stöðugleiki uppstillingar getur ráðið meiru um nákvæmni í tímamælingunum en eiginleikar klukkunnar sjálfrar. Óvissan ΔT_Θ þarf því að ná yfir allar sveiflur í mæligildum fyrir fast útslagshorn.